

DOMANI 12 APRILE

NON C'E' LA LEZIONE

DI ARITMETICA

INTERSEZIONI e SOMME DI SOTTOSPAZI (vedi DISPENSE).

Prima osservazione.

Dati A e B sottospazi di V
allora $A \cap B$ è un sottospazio di V .

(esercizio per voi: ① $0 \in A \cap B$

② $\begin{aligned} &v_1 \in A \cap B \\ &v_2 \in A \cap B \end{aligned}$

allora $v_1 + v_2 \in A \cap B$

③ se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in A \cap B$
allora $\lambda v \in A \cap B$)

FORMULA DI GRASSMANN

Notiamo che $A \cup B$ ^{in generale.} V non è un sottospazio

Def $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$

Osserviamo che $A + B$ è sottospazio di V ,
(esercizio per Voi

①

②

③

)

Lemma (Formula di Grassmann)

$$\dim A + \dim B = \dim(A \cap B) + \dim(A + B)$$

Per es. in $\mathbb{R}^5$ se A e B hanno
dim 3

$$\boxed{3 + 3} = \dim(A \cap B) + \dim(A+B)$$

$\uparrow$
 ≤ 5

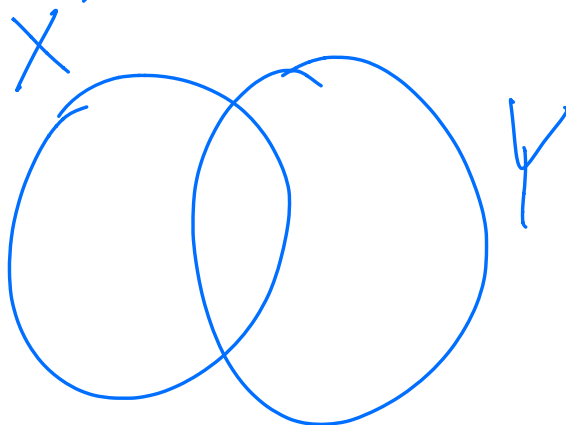
perché
è un sottosp.
di $\mathbb{R}^5$

da questo ricavo che $\dim(A \cap B) \geq 1$.

Ricordo un teorema sulla cardinalità degli
insiemi finiti:

Siano X e Y insiemi finiti
allora.

$$\cancel{\#} (X \cup Y) + \cancel{\#} (X \cap Y) = \cancel{\#} X + \cancel{\#} Y$$



Dim $A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$

è sp. vett con l'operazione

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

$$\lambda (a_1, b_1) = (\lambda a_1, \lambda b_1)$$

Che dimensione ha?

Sia $v_1, \dots, v_k$ base di A

sia $v_1, \dots, v_m$ base di B

allora le coppie $(v_1, 0)$

$(v_2, 0)$

$(v_k, 0)$

$(0, v_1)$

$\dots$

$(0, v_m)$

sono una base di $A \times B$

Allora $A \times B$ ha $\dim =$

$$\dim A + \dim B$$

Considero

$$\phi : A \times B \rightarrow V$$

applicazione lineare definita da

$$(a, b) \rightarrow a - b$$

(verificate che ϕ è lineare)

Studiamo $\text{Ker } \phi$. Gli el di $\text{Ker } \phi$
sono

$$(a, b) \text{ t.c. } \phi((a, b)) = 0$$

$$\text{ma } \phi((a, b)) = a - b$$

$$\text{cioè } a - b = 0 \quad \text{cioè } a = b$$

Dunque

$$\text{Ker } \phi = \{ (a, a) \mid a \in A \cap B \}$$

C'è un ISOMORFISMO

$$\begin{aligned} A \cap B &\rightarrow \text{Ker } \phi \\ a &\rightarrow (a, a) \end{aligned}$$

dunque $\dim \text{Ker } \phi = \dim A \cap B$
Consideriamo $\text{Im } \phi$.

$$\begin{aligned} \text{Im } \phi &= \{ a - b \mid a \in A, b \in B \} = \\ &= \{ a + b \mid a \in A, b \in B \} = \end{aligned}$$

$$= A + B$$

In particolare

$$\dim \operatorname{Im} \phi = \dim A + B$$

Per il Teo della dimensione, applico
a ϕ

$$\dim \operatorname{Ker} \phi + \dim \operatorname{Im} \phi = \dim A \times B$$

$$\dim(A \cap B) + \dim(A + B) = \dim A + \dim B$$



OPERATIVAMENTE

$$\text{Se } U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$W = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Come calcolo $U \cap W$?

Ci aiuterebbe saper scrivere U

come soluzioni di un sistema

e lo stesso per W ,

Come si può fare?

Per U .

scrivo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 2 & 4 & x_2 \\ 3 & 7 & x_3 \\ -1 & 2 & x_4 \\ 2 & -1 & x_5 \end{pmatrix}$$

FACCIO LE MOSSE DI RIGA

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_3 - 3x_1 \\ 0 & 0 & 2x_1 - x_2 \\ 0 & 0 & 13x_1 - 4x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & -17x_1 + 5x_3 + x_5 \end{array} \right)$$

esattamente
ha 2 PIVOT se e solo se

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ 13x_1 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ -17x_1 + 5x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema sono
i vettori di U

Per esercizio potete anche con W
e troverete

$$W =_{\text{def}} \begin{cases} x_2 + x_3 + 2x_5 = 0 \\ -10x_1 + 9x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

A questo punto $U \cap W$ è dato
da

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ 13x_1 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ -17x_1 + 5x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_5 = 0 \\ -10x_1 + 9x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

SOMMA DIRETTA DI SOTTOSPAZI

Def Due sottospazi A, B di V
sono in SOMMA DIRETTA se

$$A \cap B = \{0\}.$$

Per Grassmann se A e B sono
in somma diretta vale

$$\dim A + \dim B = 0 + \dim(A+B)$$

Questo vuol dire che posso ottenere una
base di $A+B$ semplicemente facendo
l'unione di una base di A con una
base di B .

Più in generale

Def Dati K sottospazi $U_1, U_2, \dots, U_K$
con $K \geq 2$ di V si dice che
sono in somma diretta se $\forall i$

$$U_i \cap (U_1 + U_2 + \dots + \overset{\uparrow}{U_i} + U_{i+1} + \dots + U_K) \\ \uparrow \\ \text{saltato} \\ = \{0\}$$

Per es per $K=3$ deve essere

$$U_1 \cap (U_2 + U_3) = \{0\}$$

$$U_2 \cap (U_1 + U_3) = \{0\}$$

$$U_3 \cap (U_1 + U_2) = \{0\}$$

Teorema (disperse)

Se $U_1, U_2, \dots, U_K$ sono in somma diretta vale

$$\dim(U_1 + \dots + U_K) = \dim U_1 + \dim U_2 + \dots + \dim U_K$$

Anche nel caso di K sottospazi in somma diretta

per avere una base di $U_1 + \dots + U_K$

basta fare l'unione di una base di

U_1 con una base di U_2 , con una base

..... di U_K .

NOTAZIONE: l'addizione si può scrivere $A \oplus B$ invece di $A+B$ per segnalare che A e B sono in somma diretta.

Esercizio Trovare, se possibile, in $\mathbb{R}^4$ tre sottospazi A, B, C di dim 2 tali che

$$A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{0\}$$

Risultato

$$A = \text{Span} \left(\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \right)$$

$$B = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Idea:

$$C = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Verfickions:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{messo di forma} \\ \leadsto \\ \text{allora} \end{array} \begin{array}{l} 4 \text{ PIVOT} \\ A+C = \mathbb{R}^4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{allora} \\ \text{messo di forma} \\ \leadsto \\ \text{allora} \end{array} \begin{array}{l} A \cap C = \{0\} \\ 4 \text{ PIVOT} \\ B+C = \mathbb{R}^4 \end{array}$$

$$\text{allora } B \cap C = \{0\}$$

Domanda: Trovare A, B, C in $\mathbb{R}^3$ tali che

$$A \cap C = \{0\}, B \cap C = \{0\} \text{ ma}$$

$$A \cap B \neq \{0\}.$$

RISPOSTA:

$$A = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$B = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right). \text{ Cerco } C.$$

$$C = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) \\ = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dice che
 $A+C=\mathbb{R}^3$
 ha rango 3

dice che
 $B+C=\mathbb{R}^3$

Dunque $A \cap C = \{0\}$

$$B \cap C = \{0\}$$

$$\text{ma } A \cap B = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \square$$